

5 лекция

Материялық нүктелер жүйесі. Сақталу заңдары. Импульстің және импульс моментінің сақталу заңдары.

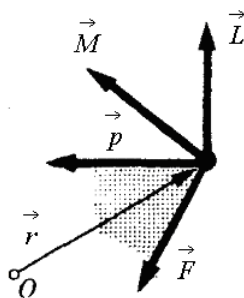
- 5.1 Материялы нүктелер жүйесі. Сыртқы және ішкі күштер
- 5.2 Материялық нүктелер жүйесінің күш моменті және импульс моменті. Материялық нүктелер жүйесіне арналған қозғалыс теңдеуі және моменттер теңдеуі
- 5.3. Механикалық жүйе массаларының центрі және оның қозғалыс заңы.
- 5.4. Сақталу заңдары
- 5.5. Импульстің сақталу заңы. Импульс моментінің сақталу заңы

Материялық нүктелер жүйесі деп олардың соңғы сандарының жиынтығын айтады. Жүйенің бұл нүктелерінің әрқайсысына шығу тегі екі түрлі күштер әсер етеді: біріншіден, бастау көзі жүйеден сырт жатқан күштер, олар **сыртқы күштер** деп аталады; екіншіден, **ішкі күштер** деп аталатын, жүйенің басқа нүктелері жағынан түсірілетін күштер.

О нүктесіне қарасты (6 сурет) материялық нүктеге әсер етуші күш моменті мына вектор болып табылады

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (41)$$

$\vec{F}$ деп материялық нүктеге әсер етуші барлық күштердің тең әсерлісін айтады. Бастапқы деп қабылданып алынған қайсыбір материялық нүктенің О нүктесіне қарасты орналасу жағдайы $\vec{r}$ радиус-векторымен сипатталады.



6 Сурет.

О нүктесіне қарасты **материялық нүктенің импульс моменті** мына вектор (6 сурет)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (42)$$

Уақыт бойынша (42) импульс моменті өрнегін дифференциалдау арқылы **моменттер теңдеуін** аламыз:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (43)$$

Материялық нүктелер жүйесінің импульсі деп жүйені құраушы материялық нүктелер импульстерінің қосындысын айтады:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n, \quad (44)$$

мұнда $\vec{P}_i$ - i индексімен белгіленген материялық нүктенің импульсі, n – жүйедегі нүктелер саны.

Материялық нүктелер жүйесінің бастапқы деп қабылданып алынған O нүктесіне қарасты импульс моменті деп O нүктесіне қарасты материялы нүктелер жүйесін құраушыларының импульс моменттерінің қосындысын айтады:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i, \quad (45)$$

мұнда $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i$ – i индексімен белгіленген материялы нүкте импульсының моменті.

Материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші күш жүйе нүктелерінің өзара әсерлесу күштерін қоса алғанда, жүйенің нүктелеріне әсер етуші барлық күштердің қосындысы ретінде анықталады:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (46)$$

мұнда

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i' + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \quad (47)$$

жүйенің i индексімен белгіленген материялық нүктесіне әсер етуші күш болып табылады. Ол осы нүктеге әсер етуші $\vec{F}_i'$ сыртқы күштен, және жүйенің басқа нүктелерімен әсерлесу нәтижесінде нүктеге әсер етуші $\sum_i \vec{F}_{ji}$ ішкі күштен құралады.

Ньютонның үшінші заңы материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші күш үшін (46) ұйғарымын қарапайым түрге енгізуге көмектеседі:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i', \quad (48)$$

яғни, материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші күш, жүйе нүктелеріне әсер етуші сыртқы күштердің қосындысына тең. Сондықтан, (46)-да $\vec{F}_i$ -деп тек сыртқы күштерді түсінуге болады.

O нүктесіне қарасты **материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші күш моменті** деп, O нүктесіне қарасты жүйе нүктелеріне түсірілген күш моменттерінің қосындысын айтады:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (49)$$

(49)-ғы $\vec{F}_i$ күші i нүктесіне түсірілген ішкі күштерді қоса алғандағы толық күш болып табылады:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i' + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji},$$

мұнда $\vec{F}_i'$ – сыртқы күш, ал $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ – ішкі күштер.

Уақыт бойынша (44)-ті дифференциалдау арқылы **материялық нүктелер жүйесінің теңдеуін** аламыз:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}, \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \quad (50)$$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i. \quad (51)$$

Мұндағы $\vec{F}$ шамасы сыртқы күштер қосындысына тең, өйткені, (51) қосындысында барлық ішкі күштер өзара қысқарады.

Уақыт бойынша (45)-ті дифференциалдасақ, **материялық нүктелер жүйесі үшін моменттер теңдеуін** аламыз:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{P}_i + \sum \vec{r}_i \times \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{M}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (52)$$

Естеріңізге салайық, $\vec{M}$ – сыртқы күштер моменті.

Массалар центрі. Бейрелятивистік жағдайда, яғни, аз жылдамдықты қозғалыстар кезінде, массалар центрі ұғымын енгізуге болады. Ең алдымен, нүктелер жүйесінің импульсі үшін ұйғарымдарды қарастырайық:

$$\vec{P} = \sum m_{oi} \vec{V}_i = \sum m_{oi} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_{oi} \vec{r}_i = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum m_{oi} \vec{r}_i \right), \quad (53)$$

мұнда $m = \sum m_{oi}$ өзін құраушы нүктелердің тыныштық массасының қосындысы ретінде түсінілетін жүйе массасы.

Радиус-вектор

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \sum m_{oi} \vec{r}_i \quad (54)$$

жүйе массаларының центрі деп аталатын жорамал нүктені анықтайды.

$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ шамасы – осы жорамал нүктенің қозғалыс жылдамдығы. Ендеше

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{R}}{dt} = m\vec{V}. \quad (55)$$

Осы ұйғарымдарды ескерсек, қозғалыс теңдеуі мынадай түрге енеді:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}, \quad (56)$$

яғни, ол бүкіл массасы массалар центріңде шоғырланған, ал жүйенің нүктелеріне әсер етуші барлық сыртқы күштер оның массалар центріне түсірілген материялық нүкте қозғалысының теңдеуіне эквивалентті.

Сақталу заңдары қозғалыстың жалпы қасиеттерін теңдеулерді шешпей-ақ, және уақыт аралығындағы үрдістердің дамуы туралы жан-жақты ақпаратсызақ қарастыруға мүмкіндік береді.

Сақталу заңдарының жалпы сипаты оларды тек қозғалыстың теңдеуі белгілі болып, бірақ олардың шешуі белгісіз болғанда ғана емес, сонымен бірге қозғалыс теңдеуі белгісіз болғанда да қолдануға мүмкіндік береді. Нәтижесінде, қозғалыстың өте маңызды ерекшеліктерін күш әсері заңын білмей-ақ жиі анықтауға тура келеді.

Өте кең күштер класстары үшін қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралын жалпы түрде шығарып, нәтижесін физикалық шамалардың белгілі бір комбинацияларының сандық мәнінің тұрақтылығы ретінде қабылдау мүмкін болады. Сақталу заңы дегеніміздің өзі осы. Механикада сақталу заңдары математикалық тұрғыдан алғанда қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралдарына әкелінеді.

Тұйықталған жүйе үшін импульстің сақталу заңы. Егер сыртқы күштер жоқ болатын болса, материялық нүктелер жүйесі немесе материялық нүкте тұйықталған деп аталады. Сондықтан қозғалыс теңдеуінде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (57)$$

күш $\vec{F} = 0$ және ол мына түрге енеді:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \quad (58)$$

Осы теңдеуді интегралдасақ, алатынымыз:

$$\vec{P} = const, \quad (59)$$

оған қоса,

$$P_x = const, \quad P_y = const, \quad P_z = const. \quad (60)$$

Бұл теңдік импульстің сақталу заңын білдіреді: тұйықталған жүйе импульсі жүйе ішінде өтіп жатқан кез келген үрдістер кезінде өзгермейді. Бейрелятивистік жағдайда материялы нүктелер жүйесі үшін заң жүйенің массалар центрі бірқалыпты және түзу бағытта қозғалуда екенін бекітеді.

Материялық нүктелер жүйесі тұйықталмаған боп шығуы мүмкін, бірақ кейбір жағдайда сыртқы күштер тек белгілі бір бағыттарда ғана әрекет етеді де, ал қалғандарында жоқ болады. Айталық, мысалы (x, y) жазықтығына параллел бағыттарда күштер жоқ, яғни $F_x = 0, F_y = 0, F_z \neq 0$. Онда

$$P_x = const, \quad P_y = const. \quad (61)$$

Бұдан көретініміз – (x, y) жазықтығында жүйе импульсі өз мәнін сақтайды.

Импульс моментінің сақталу заңы. Бұл заң да импульстің сақталу заңы сияқты тек тұйықталған жүйелер үшін әділетті. Олар үшін сыртқы күштер моменті $\vec{M}$ нөлге тең, және моменттер теңдеуі мынадай:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0. \quad (62)$$

Бұл теңдеуді интегралдау арқылы алатынымыз:

$$\vec{L} = const, \quad (63)$$

сонымен бірге

$$L_x = const, \quad L_y = const, \quad L_z = const. \quad (64)$$

Импульс моментінің сақталу заңы мынаны білдіреді: тұйықталған жүйенің импульс моменті жүйе ішінде болып жатқан кез келген үрдістер кезінде өзгермейді.

Айталық, жүйе толығымен тұйықталмаған болуы да мүмкін, бірақ кейбір бағыттарға, мысалы, Z өсіне, күш моменті проекциясы нөлге тең. Демек,

жүйені тұйықталған деп тек импульс моментінің Z -тік проекциясына ғана қатысты есептеуге болады:

$$L_z = \text{const.} \quad (65)$$